## 5.1. Случайные величины. Закон распределения вероятностей

Под с***лучайной величиной*** понимается величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение. Возможные значения случайной величины образуют множество Ξ, которое называется ***множеством возможных значений*** случайной величины. Обозначения слу­чайной величины: *X*, *Y, Z*; возможные значения случайной величины: *x*, *y, z*.

Примеры случайных величин:

1. Опыт –бросание двух монет. Тогда Ξ ={(г,г), (г,ц), (ц,г), (ц,ц)}. Числовая функция *Х* (СВ *Х*)– число выпадений герба, определенная на множестве Ξ={0,1,2} – герб может выпасть 0,1,2 раза.

2. Опыт - работа ЭВМ после ремонта, случайная величина *T* – время наработки на отказ. Множество возможных значений Ξ – теоретически вся правая половина оси абсцисс. Множество возможных значений для этого опыта несчетно.

В зависимости от вида множества Ξ случайные величины могут быть *дискретными* и *недискретными*. СВ *Х* называется ***дискретной***, если множество ее возможных значений Ξ – счетное или конечное. Если множество возможных значений СВ несчетно, то такая СВ является ***недискретной***.

В теоретико-множественной трактовке основных понятий теории вероятностей случайная величина *Х* есть функция элементарного события: *X*=φ(*ω*), где ω – элементарное событие, принадлежащее пространству Ω. При этом множество Ξ возможных значений СВ *Х* состоит из всех значений, которые принимает функция φ(*ω*).

***Законом распределения СВ*** называется любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всевозможных событий, связанных со случайной величиной. (То есть, всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями СВ и их вероятностями.)

СВ будет полностью описана с вероятностной точки зрения, если мы зададим это распределение, т.е. в точности укажем, какой вероятностью обладает каждое событие. Про случайную величину мы будем говорить, что она *подчинена данному закону распределения*.

## 5.2. Ряд распределения дискретной случайной величины.

Наиболее простую форму можно придать закону распределения дискретной случайной величины. *Рядом распределения* дискретной случайной величины называется таблица, в которой перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины *X*: *x1, x2, …, xn,* … и вероятности этих значений *p1, p2, …, pn, …,* где *pi=P{X=xi}* – вероятность того, что в результате опыта СВ Х примет значение *xi* (*i*=1,2,…, *n*, …).

Ряд распределения записывается в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | *x1* | *x2* | *…* | *xn* | *…* |
| *P* | *p1* | *p2* | *…* | *pn* | *…* |

Так как события {X=x1}, {X=x2}, … несовместны и образуют полную группу, то сумма всех вероятностей, стоящих в нижней строке равна единице:

 (5.1)

***Многоугольник вероятностей*** – есть графическое изображение ряда вероятностей – по оси абсцисс откладываются возможные значения случайной величины, а по оси ординат – вероятности этих значений. Для наглядности полученные точки соединяются отрезками прямых. Многоугольник распределения, так же как и ряд распределения полностью характеризует случайную величину – и является одной из форм закона распределения.

## 5.3. Функция распределения

Наиболее общей формой закона распределения, пригодной для *всех* случайных величин (как дискретных, так и недискретных) является функция распределения.

***Функцией распределения*** случайной величины *X* называется вероятность того, что она примет значение меньшее, чем аргумент функции *x*: *F*(*x*)=P{*X*<*x*}.

Геометрически функция распределения интерпретируется как вероятность того, что случайная точка X попадет левее заданной точки X (рис. 5.1). Из геометрической интерпретации наглядно можно вывести *основные свойства функции распределения.*

1. *F*(-∞ ) = 0. (5.2)

2. *F*(+∞ ) = 1. (5.3)

1. *F*(*x*) – неубывающая функция своего аргумента, т.е. при *x*1 < *x*2

*F*(*x*1) ≤ *F*(*x*2).

Доказательство этого свойства иллюстрируется рис. 5.2.

Представим событие *C*={*X*<*x2*} как сумму двух несовместных событий *С=A+B*, где *A*={*X*<*x1*} и *B*={*x1≤X<x2*}.

По правилу сложения вероятностей

*P*(*C*)=*P*(*A*)+*P*(*B*),

т.е. *P*{*X*<*x2*}=*P*{*X*<*x1*}+*P{ x1≤X<x2*}, или

F(x2)=F(x1)+P{*x1≤X<x2*}.

Но P{*x1≤X<x2*}≥0, следовательно, *F*(*x*1) ≤ *F*(*x*2)

4. P(α≤ *X* < β) = *F*(β) - *F*(α), для ∀[α,β[∈R. (5.4)

Доказательство этого свойства вытекает из предыдущего доказательства.

*Вероятность того, что случайная величина Х в результате опыта попадет на участок от α до β (включая α)* ***равна приращению функции распределени****я на этом участке.*

Таким образом, *функция распределения F(x)любой случайной величины есть неубывающая функция своего аргумента, значения которой заключены между 0 и 1: 0≤F(x)≤1, причем F(-∞)=0, F(+∞)=1.*

## 5.4. Функция распределения дискретной случайной величины

Исходной информацией для построения функции распределения дискретной случайной величины *X* является ряд распределения этой СВ.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *x*1 | *x*2 | *x*3 | ... | *xn* | >*xn* |
| *pi* | *p*1 | *p*2 | *p*3 | ... | *pn* | 0 |
| *F*(*xi*) | 0 | *p*1 | *p*1+*p*2 |  | *p*1+..+*pn*-1 | 1 |

*F*(*xi*)=P{*X*<*xi*}=P{(*X*=*x*1)∪(*X*=*x*2)∪ ... ∪(*X*=*xi-*1)}= *p*1+...+*pi*-1.

, то есть суммирование распространяется на все значения , которые меньше х.

Функция распределения любой дискретной СВ есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятности этих значений.

 (5.5)

Пример: СВ Х – количество выпавших гербов при подбрасывании двух монет. Случайная величина Х принимает следующие значения X={0, 1, 2}. Вероятности этих значений: *P(X=*0*)=*0,25*; P(X=*1*)=*0,5*; P(X=*2*)=*0,25. Тогда функция распределения этой случайной величины имеет вид:



## 5.5. Непрерывная случайная величина (НСВ). Плотность вероятности

***Случайная величина*** Х называется ***непрерывной***, если ее функция распределения *F(x)* есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

Так как для таких случайных величин функция *F(x)* нигде не имеет скачков, то *вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю*

*P*{*X*=*α*}=0 для любого *α*.

В качестве закона распределения, имеющего смысл только для непрерывных случайных величин существует понятие ***плотности распределения*** или ***плотности вероятности***.

Вероятность попадания непрерывной случайной величины X на участок от *x* до *x*+Δ*x* равна приращению функции распределения на этом участке:

P{*x≤ X* <*x*+Δ*x*}=*F*(*x*+Δ*x*) - *F*(*x*).

Плотность вероятности на этом участке определяется отношением

 (5.6)

***Плотностью распределения*** (или плотностью вероятности) непрерывной случайной величины *X* в точке *x* называется производная ее функции распределения в этой точке и обозначается *f*(*x*). График плотности распределения называется кривой распределения.

Пусть имеется точка *x* и прилегающий к ней отрезок *dx*. Вероятность попадания случайной величины *X* на этот интервал равна *f*(*x*)*dx*. Эта величина называется **элементом вероятности.**

Вероятность попадания случайной величины *X* на произвольный участок [*a*, *b*[ равна сумме элементарных вероятностей на этом участке:

 (5.7)

В геометрической интерпретации P{α≤X<β} равна площади, ограниченной сверху кривой плотности распределения *f*(*x*) и опирающейся на участок (α,β) (рис. 5.4).

Это соотношение позволяет выразить функцию распределения *F*(*x*) случайной величины *X* через ее плотность:

 (5.8)

В геометрической интерпретации *F*(*x*) равна площади, ограниченной сверху кривой плотности распределения *f*(*x*) и лежащей левее точки *x* (рис. 5.5).

***Основные свойства плотности распределения:***

1. Плотность распределения неотрица­тель­на: *f*(*x*) ≥ 0.

Это свойство следует из определения *f(x)* – производная неубывающей функции не может быть отрицательной.

2. Условие *нормировки:*  Это свойство следует из формулы (5.8), если положить в ней *x*=∞.

Геометрически основные свойства плотности *f(x)* интерпретируются так:

1. вся кривая распределения лежит не ниже оси абсцисс;
2. полная площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице.

## 5.6. Смешанная случайная величина

Случайная величина называется *смешанной,* если функция распределения *F(x)* на некоторых участках непрерывна, а в отдельных точках имеет разрывы (скачки).

На тех участках, где *F(x)* непрерывна, вероятность каждого отдельного значения случайной величины равна нулю. Вероятность тех значений, где функция распределения совершает скачки, отличны от нуля и равны величине скачка.

*Пример* 5.1. По одной и той же стартовой позиции противника производится пуск из пяти ракет, причем вероятность попадания в цель при каждом пуске одной ракеты равна 0,8. Построить ряд распределения числа попаданий.

*Решение*. Случайная величина *X* (число попаданий в цель) может принимать следующие значения: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Найдем вероятность принятия величиной *X* этих значений, используя формулу Бернулли:

 ,

,

,

,

,

.

Ряд распределения имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *pi* | 0,00032 | 0,0064 | 0,0512 | 0,2048 | 0,4096 | 0,32768 |

*Пример* 5.2. Случайная величина *X* распределена по закону, определяемому плотностью вероятности вида

.

Найти константу *c*, функцию распределения *F*(*x*) и вычислить P{|*x*| < /4}.

*Решение*. Константу *с* вычислим исходя из условия нормировки:

,

откуда *с* = 0,5.

Так как плотность вероятности задана различными формулами на разных интервалах, то и функцию распределения будем искать для каждого интервала в отдельности.

Для *x* < -/2, 

для -/2*x*/2  ,

для *x* > /2,  .

Окончательно имеем



Вероятность P{|*x*| < /4}=.